TEMA V.

"MODELOS PROBABILISTICOS DE FENOMENOS ALEATORIOS CONTINUOS".

DISTRIBUCIÓN UNIFORME

RECORDANDO LA PROBABILIDAD CLÁSICA:

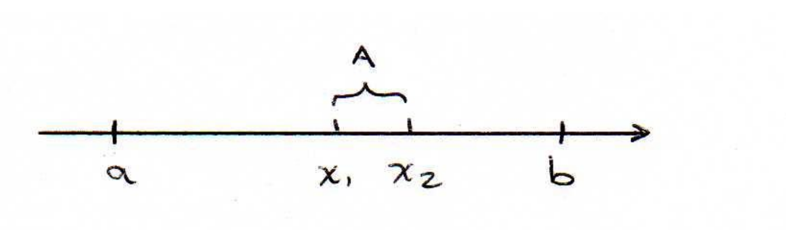
$$P(A) = \frac{N(A)}{N(S)} \quad \begin{matrix} \leftarrow \text{NUMERO DE ELEMENTOS DE A} \\ \leftarrow \text{NUMERO DE ELEMENTOS DE S} \end{matrix}$$

SI LOS ELEMENTOS DE A LOS REPRESENTAMOS POR MEDIO DE UNA VARIABLE ALEATORIA "X"

$$X \begin{cases} \text{CONTINUA} \\ \text{DISCRETA} \end{cases}$$

EN EL CASO DE QUE X SEA CONTINUA:

$$P(A) = \frac{\text{MAGNITUD DE A}}{\text{MAGNITUD DE S}}$$



$$P(A) = \frac{X_2 - X_1}{b - a} \qquad \text{.... (a)}$$

SI SE DEFINE UNA FUNCION DENSIDAD DE PROBABABILIDAD f(x). ENTONCES:

$$\mathbf{P\ (X_1 < X < X_2) =} \int_{x1}^{X2} f(x)dx$$

Como $\int f(x)dx$ **= h (x) ....(b)**

Entonces

$$\mathbf{P\ (x_1 < x < x_2) =} \int_{X_1}^{X_2} f(x)dx \mathbf{= h\ (x)} \Big|_{X1}^{X2} \quad \mathbf{\ldots\ldots\ (c)}$$

de (a) se puede ver que

$$\frac{\mathbf{X_2 - X_1}}{b - a} = \frac{\mathbf{X}}{b - a}\Big|_{X1}^{X2} = P\ (X_1 < X < X_2)$$

IGUALANDO ESTO CON (C)

$$\frac{X}{b - a}\Big|_{x1}^{x2} = h\ (x)\ \Big|_{x1}^{x2}$$

de donde

$$h\ (x) = \frac{X}{b - a}$$

y sustituyendo en (b)

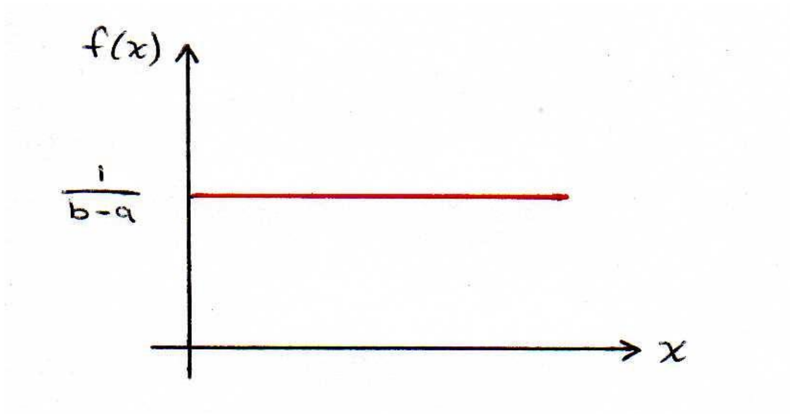
$$\int f(x)dx = \frac{X}{b - a}$$

derivando

$$f\ (x) = \frac{1}{b - a} \quad ; \quad \text{SI } a \le x \le b$$

ESTA FUNCION DEFINE UNA DISTRIBUCIÓN DE PROBABILIDAD PARA LA VARIABLE ALEATORIA “x”. A ESTA DISTRIBUCIÓN SE LE LLAMA “DISTRIBUCIÓN UNIFORME O RECTANGULAR”.

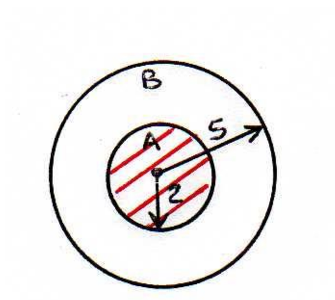
GRÁFICAMENTE:



$$P\ (\ x_1 < x < x_2\ ) = \int_{X1}^{X2} \frac{1}{b - a}\ dx$$

EJEMPLO:

UN PARACAIDISTA SE LANZA DESDE UN AVION, ¿CUAL ES LA PROBABILIDAD DE QUE CAIGA EN EL AREA A y B, QUE ESTAN MARCADAS EN EL PISO?



DISTRIBUCIÓN UNIFORME O RECTANGULAR

$$P(A) = \frac{\text{magnitud de A}}{\text{magnitud de S}} = \frac{\pi\ (2)^2}{\pi\ (5)^2} = \frac{4}{25} = 0.16 = \underline{16\%}$$

$$P(B) = \frac{\text{magnitud de B}}{\text{magnitud de S}} = \frac{\pi\ (5)^2 - \pi\ (2)^2}{\pi\ (5)^2} = \frac{21}{25} = 0.84 = \underline{84\%}$$

PARA OBTENER LA MEDIA Y LA VARIANCIA:

$$\mu_x = E\{x\} = \int_a^b x \frac{1}{b-a} dx = \frac{1}{2} x^2 \frac{1}{b-a} \Big|_a^b$$

$$\mu_x = ½ (b^2 - a^2) \frac{1}{b-a}$$

$$\mu_x = \frac{(b+a)(b-a)}{2(b-a)} = \frac{b+a}{2}$$

$$\sigma_x^2 = E\{x^2\} - \mu_x^2 = \int_a^b x^2 \frac{1}{b-a} dx - \left(\frac{b+a}{2}\right)^2 = \frac{(b-a)^2}{12}$$

DISTRIBUCION EXPONENCIAL

SI EN UNA DISTRIBUCION DE POISSON EL INTERVALO ES TIEMPO, ENTONCES LA DISTRIBUCION EXPONENCIAL SE UTILIZA PARA DETERMINAR EL TIEMPO QUE TRANSCURRE HASTA QUE SE VERIFIQUE EL PRIMER EVENTO (PUNTO).

LA FUNCION DENSIDAD DE PROBABILIDAD PARA LA DISTRIBUCION EXPONENCIAL ES:

$$f(t) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t} & ; \quad t > 0 \\ 0 & ; \text{ cualquier otro caso.} \end{cases}$$

$$P(t_1 < t < t_2) = \int_{t1}^{t2} f(t)\, dt$$

CALCULO DE LA MEDIA:

$$\mu_x = E\{x\} = \int_0^{\infty} x\, f(x)\, dx = \int_0^{\infty} x\, \lambda\, e^{-\lambda x}\, dx = \lambda \int_0^{\infty} x\, e^{-\lambda x}\, dx =$$

$u = x$; $du = dx$

$dv = e^{-\lambda x}\, dx$; $v = -1/\lambda\, e^{-\lambda x}$

$$\mu_x = \lambda \left(- x/\lambda\, e^{-\lambda x} \right) \Big|_0^{\infty} + 1/\lambda \int_0^{\infty} e^{-\lambda x}\, dx \,) = \lambda\, [1/\lambda\, (\, - 1/\lambda\, e^{-\lambda x}\,)\, |_0^{\infty}] =$$

$$\mu_x = \frac{1}{\lambda}$$

CALCULO DE LA VARIANCIA

$$\sigma_x^2 = E\{x^2\} - \mu_x^2$$

$$E\{x^2\} = \int_0^{\infty} x^2 f(x)\, dx = \int_0^{\infty} x^2\, \lambda e^{-\lambda x}\, dx$$

$$\sigma_x^2 = E\{x^2\} - \mu_x^2 = \frac{1}{\lambda^2}$$

$$\sigma_x^2 = \frac{1}{\lambda^2}$$

EJEMPLOS:

1.- SE HA OBSERVADO QUE LA FRECUENCIA DE LLEGADA DE AUTOBUSES A UNA DETERMINADA “PARADA”, ES DE 3 POR HORA. ¿CUÁL ES LA PROBABILIDAD DE QUE LLEGUEMOS A LA PARADA Y ESPEREMOS 10 MINUTOS PARA QUE LLEGUE EL AUTOBUS?

$\lambda = 3$ AUTOBUSES / HORA

$$P(0 < t < 1/6) = \int_0^{1/6} \lambda e^{-\lambda t}\, dt = \int_0^{1/6} 3e^{-3t}\, dt = -e^{-3t}\, \Big|_0^{1/6} = -e^{-1/2} + 1 =$$

$P(0 < t < 1/6) = 0.3934 = 39.34\%$

¿CUAL ES LA PROBABILIDA DE QUE ESPEREMOS MAXIMO 1 HORA PARA QUE LLEGUE EL PRIMER AUTOBUS?

$$P(0 < t < 1) = \int_0^1 3e^{-3t}\,dt = -e^{-3t}\Big|_0^1 = -e^{-3} + 1 = 0.9502129 =$$

$P(0 < t < 1) = 95.02\%$

2.- SE HA OBSERVADO QUE LAS FALLAS MECANICAS OCURRIDAS EN UNA INDUSTRIA SE PRESENTAN UNA CADA DOS HORAS, SI SE LLEGA A LA PLANTA A LAS 9:00 DE LA MAÑANA Y SI SE DESIGNA CON t EL TIEMPO DESDE LA LLEGADA HASTA SU PRIMER FALLA. DETERMINAR:

a) LA PROBABILIDAD DE QUE TRANSCURRA UNA HORA ANTES DE QUE APAREZCA LA PRIMER FALLA.

b) LA PROBABILIDAD DE QUE NO PASEN MAS DE 4 HORAS ANTES DE LA PRIMER FALLA.

SOLUCION:

DISTRIBUCIÓN EXPONENCIAL

a) $\lambda = ½$ fallas/hora

$$P(t > 1) = \int_1^\infty ½\, e^{-½t}\,dt = -e^{-½t}\Big|_1^\infty = 0 + e^{-½} = 0.6065$$

$P(t > 1) =$ <u>60.65%</u>

$$\text{b) } P(0 < t < 4) = \int_0^4 ½\, e^{-½t}\,dt = -e^{-½t}\Big|_0^4 = -e^{-2} + 1 = 0.8647$$

$P(0 < t < 4) =$ <u>86.47%</u>

DISTRIBUCION NORMAL.

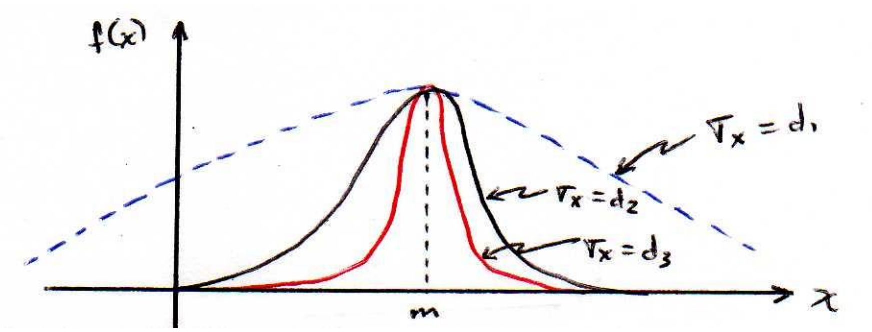
UNA VARIABLE ALEATORIA CONTINUA x TIENE DISTRIBUCIÓN NORMAL SI SU FUNCIÓN DENSIDAD DE PROBABILIDAD ES :

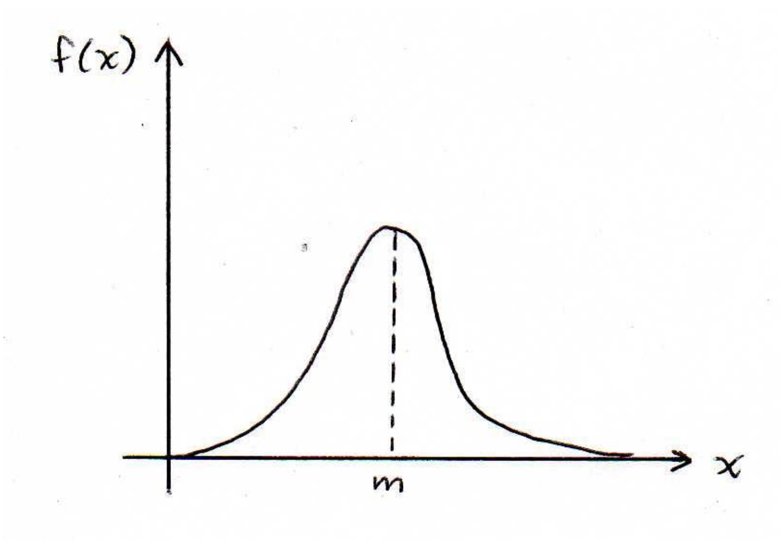
$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\ d}\ e^{-(x-m)2/2d2} \ ; -\infty < x < \infty$$

DONDE m Y d SON CONSTANTES

$\mu_x = m$

$\sigma_x^2 = d^2$

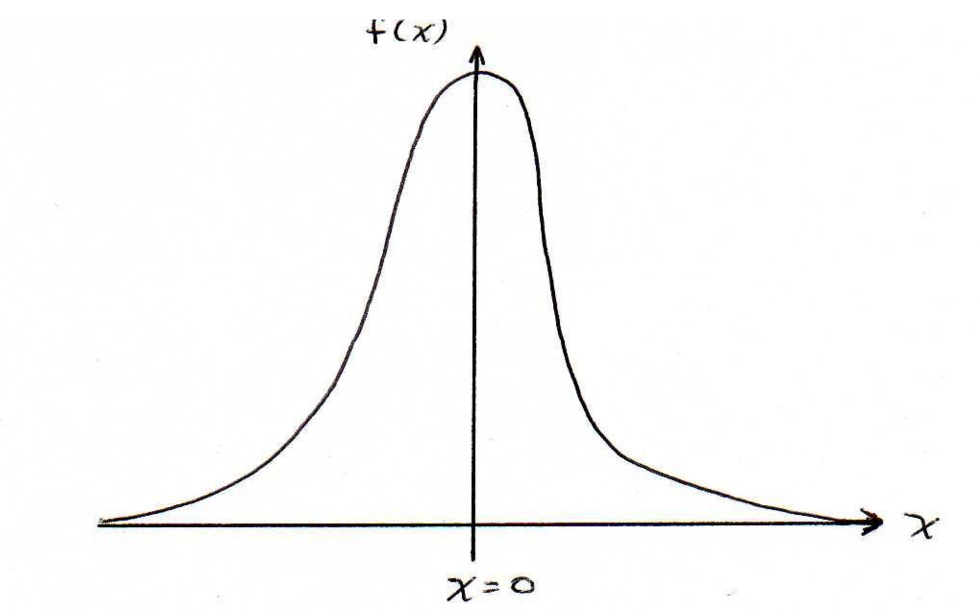




DISTRUBUCION NORMAL ESTANDAR

m = 0 ; d = 1

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\ d}\ e^{-x2/2}$$; FUNCION DE DENSIDAD DE PROBABILIDAD Y DEFINE UNA DISTRIBUCION NORMAL ESTANDAR



CALCULO DE PROBABILIDADES : SEA LA VARIABLE ALEATORIA x CON MEDIA μ_x Y DESVIACIÓN ESTANDAR σ_x^2 :

$$P(x_1 < x < x_2) = \int_{x1}^{x2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\ \sigma_x}\ e^{-(x-m)2/2\sigma x2}\, dx$$

HACIENDO :

$$Z = \frac{(x - \mu_x)^2}{\sigma_x}$$

$$P(x_1 < x < x_2) = \int_{x1=z1\sigma x+\mu x}^{x2=z2\sigma x+\mu x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z2/2}\, dz$$

UTILIZAR TABLAS DE LA FUNCION DE DISTRIBUCION ACUMULADA

EJEMPLO:

1.- SI X ES UNA VARIABLE ALEATORIA CON DISTRIBUCIÓN NORMAL, CON $\mu = 5$ Y $\sigma_x = 2$, DETERMINAR:

a) $P(5 \leq x \leq 7)$
b) $P(x \leq 6)$
c) $P(x \leq 3)$
d) $P(x \geq 8)$
e) $P(1 \leq x \leq 2)$
f) $P(6 \leq x \leq 7.5)$
g) $P(x \geq 4.5)$

a) $P(5 < x < 7) = P(0 < z < 1) = \left| 0.84135 - 0.5 \right| = 0.34135 = \underline{34.135\%}$

$$z = \frac{x - \mu_x}{\sigma_x}$$

$$z_1 = \frac{x_1 - \mu_x}{\sigma_x} = \frac{5 - 5}{2} = 0$$

$$z_2 = \frac{x_2 - \mu_x}{\sigma_x} = \frac{7 - 5}{2} = 1$$

b) $P(x \leq 6) = P(z \leq 0.5) = 0.69145 = \underline{69.145\ \%}$

$x - \mu_x \qquad 6 - 5$

$$z = \frac{}{\sigma_x} = \frac{}{2} = 0.5$$

c) $P(x \leq 3) = P(z \leq -1) = 0.15865 =$ <u>15.865 %</u>

$$z = \frac{x - \mu_x}{\sigma_x} = \frac{3 - 5}{2} = -1$$

d) $P(x \geq 8) = P(z \geq 1.5) = | 0.93320 - 1 | = 0.0668 =$ <u>6.68 %</u>

$$z = \frac{x - \mu_x}{\sigma_x} = \frac{8 - 5}{2} = 1.5$$

e) $P(1 \leq x \leq 2) = P(-2 \leq z \leq -1.5) = | 0.06680 - 0.02276 | = 0.04404 =$ <u>4.404 %</u>

$$z = \frac{x - \mu_x}{\sigma_x}$$

$$z_1 = \frac{x_1 - \mu_x}{\sigma_x} = \frac{1 - 5}{2} = -2$$

$$z_2 = \frac{x_2 - \mu_x}{\sigma_x} = \frac{2 - 5}{2} = -1.5$$

f) $P(6 \leq x \leq 7.5) = P(0.5 \leq z \leq 1.25) = | 0.89436 - 0.69145 | = 0.20291 =$ <u>20.291 %</u>

$$z = \frac{x - \mu_x}{\sigma_x}$$

$$z_1 = \frac{x_1 - \mu_x}{\sigma_x} = \frac{6 - 5}{2} = 0.5$$

$$z_2 = \frac{x_2 - \mu_x}{} = \frac{7.5 - 5}{} = 1.25$$

$\sigma_x \qquad\qquad 2$

g) $P(x \geq 4.5) = P(z \geq -0.25) = \left| 1 - 0.40129 \right| = 0.5987 =$ <u>59.87 %</u>

$$z = \frac{x - \mu_x}{\sigma_x} = \frac{4.5 - 5}{2} = -0.25$$

EJEMPLO:

EN UN ALMACEN SE UTILIZAN LÁMPARAS FLUORESCENTES CON VIDA MEDIA DE 3,500 HORAS Y DESVIACIÓN ESTANDAR DE 600 HORAS, LA DURACIÓN TIENE DISTRIBUCIÓN NORMAL.

a) **SI LAS LUCES ESTAN ENCENDIDAS 10 HORAS AL DIA DURANTE 52 SEMANAS. ¿Qué PORCENTAJE DE LAS LAMPARAS NECESITARAN REPONERSE?**
b) **¿DESPUÉS DE CUANTAS SEMANAS SERIA NECESARIO REPONER EL 10% DE LAS LÁMPARAS?**

VIDA MEDIA = $\mu_x = 3{,}500$ horas
$\sigma_x = 600$ horas

SEMANA DE 7 DIAS

X : LA VIDA ÚTIL DE LAS LÁMPARAS

a) **(70 horas/semana)(52 semanas) = 3,640 horas**

SE TENDRAN QUE REPONER LAS QUE DUREN MENOS DE 3,640 HORAS

$$z = \frac{x - \mu_x}{\sigma_x} = \frac{3{,}640 - 3{,}500}{600} = 0.2333$$

LA PROBABILIDAD DE QUE LAS LÁMPARAS DURAN MENOS DE 3,640 HORAS ES:

$P(x \leq 3{,}640) = P(z \leq 0.2333) = 0.59096 =$ <u>59.096 %</u>

b)

$$- 1.28 = \frac{x - \mu_x}{\sigma_x} = \frac{x - 3{,}500}{600}$$

x = 600 (- 1.28) + 3,500 = 2,732 horas

2,732 horas / 70 horas / semana = <u>39.02 semanas</u>

EJEMPLO:

CON FRECUENCIA SE SUPONE QUE LAS MEDICIONES DE LONGITUD USANDO UN INSTRUMENTO CALIBRADO CON LA SUFICIENTE EXACTITUD, ESTAN DISTRIBUIDAS EN FORMA NORMAL ALREDEDOR DE LA LONGITUD VERDADERA DEL OBJETO MEDIDO. SUPONGA QUE LA LONGITUD DEL OBJETO ES DE 9 METROS Y QUE LA MEDIACIÓN DE LA MISMA ES UNA VARIABLE ALEATORIA x CON DISTRIBUCIÓN NORMAL, CON $\mu_x = 9$ Y $\sigma_x = 0.02$ DETERMINAR LA PROBABILIDADA DE QUE LA LONGITUD MEDIDA ESTE ENTRE 8.99 Y 9.02

$\mu_x = 9$
$\sigma_x = 0.02$

$P(8.99 < x < 9.02) = P(-0.5 < z < 1) = \left| 0.84135 - 0.30855 \right| = 0.5328 =$ <u>53.28%</u>

$$z = \frac{x - \mu_x}{\sigma_x}$$

$$z_1 = \frac{x_1 - \mu_x}{\sigma_x} = \frac{8.99 - 9}{0.02} = -0.5$$

$$z_2 = \frac{x_2 - \mu_x}{\sigma_x} = \frac{9.02 - 9}{0.02} = 1$$

EJEMPLO:

SUPONER QUE LA DISTANCIA x A LA QUE UN LANZADOR DE DISCO PUEDE EFECTUAR SU PRIMER TIRO ES UNA VARIABLE ALEATORIA NORMAL, CON PARÁMETROS DE MEDIA IGUAL A 50 METROS Y DESVIACIÓN ESTANDAR IGUAL A 5 METROS. CALCULAR LA PROBABILIDAD DE QUE

a) **SU TIRO "NO" SEA MENOR DE 55 METROS.**
b) **ESTE ENTRE 50 Y 60 METROS.**

μ_x **= 50 METROS**
σ_x **= 5 METROS**

a) $P(x \geq 55) = P(z \geq 1) = |1 - 0.84135| = 0.1586 = \underline{15.86\ \%}$

$$z = \frac{x - \mu_x}{\sigma_x} = \frac{55 - 50}{5} = 1$$

b) $P(50 < x < 60) = P(0 < z < 2) = |0.97724 - 0.5| = 0.47724 = \underline{47.724\ \%}$

$$z_1 = \frac{x_1 - \mu_x}{\sigma_x} = \frac{50 - 50}{5} = 0$$

$$z_2 = \frac{x_2 - \mu_x}{\sigma_x} = \frac{60 - 50}{5} = 2$$

EJEMPLO:

UNA MAQUINA AUTOMATICA QUE EXPENDE CAFÉ , LLENA LAS COPAS CON 6 ONZAS DE CAFÉ Y CON σ_x = 0.4 SI SE USAN COPAS DE 7 ONZAS ¿QUÉ PORCENTAJE DE ELLOS SE DERRAMARA?

μ_x **= 6**
σ_x **= 0.4**

$P(x > 7) = P(z > 2.5) = |1 - 0.99378| = 0.00622 = \underline{0.622\ \%}$

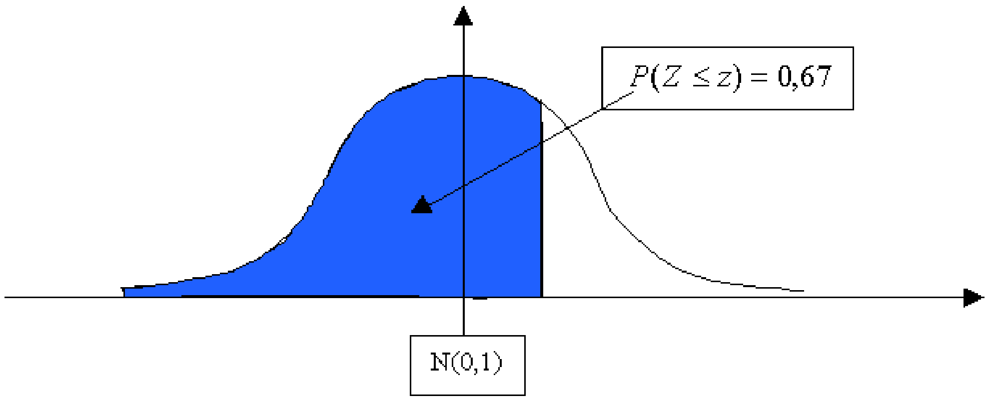
$$z = \frac{x - \mu_x}{} = \frac{7 - 6}{} = 2.5$$

σ_x 0.4

EJEMPLO:

En un examen de matemáticas, en el que se ha evaluado de 0 a 20 puntos, el 67% de los alumnos ha obtenido una puntuación igual o menor que 12.2 y el 9% ha obtenido puntuación superior a 16.7. Suponiendo que la distribución de las puntuaciones sea normal, calcule su media y su desviación típica

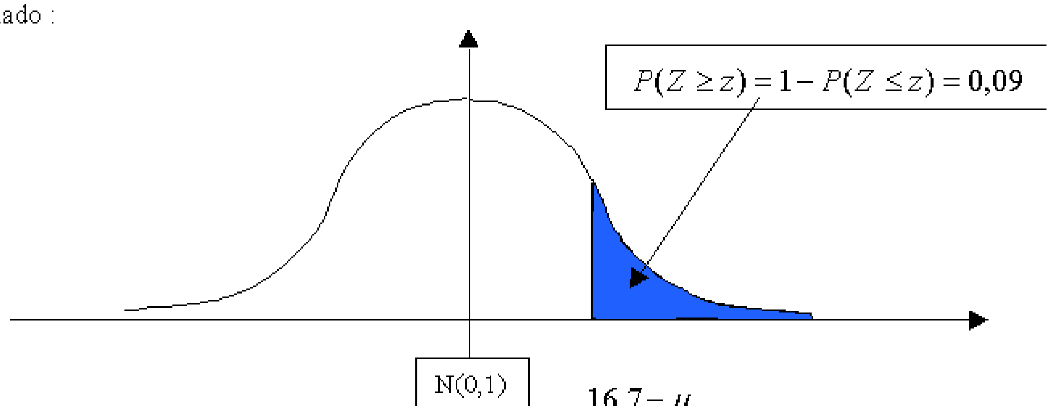
Sea :



Por las tablas de la función de distribución de la normal N(0, 1) :

$$si\ P(Z \le <) = 0{,}67 \Rightarrow z = 0{,}44 \quad y\ como \quad z = \frac{12{,}2 - \mu}{\sigma}\ tenemos\ una\ ecuación$$

Por otro lado :



$$P(Z \le z) = 1 - 0{,}09 = 0{,}91 \Rightarrow z = 1{,}34 \quad y\ como \quad z = \frac{16{,}7 - \mu}{\sigma} \quad tenemos\ otra\ ecuación$$

Con las dos ecuaciones, tenemos el sistema:

$$\begin{cases} 12{,}2 - \mu = 0{,}44\sigma \\ 16{,}7 - \mu = 1{,}34\sigma \end{cases} \Rightarrow \quad 0{,}9\sigma = 4{,}5 \quad \Rightarrow \quad \sigma = \frac{4{,}5}{0{,}9} = 5$$

Sustituyendo en la primera ecuación :

$$\mu = 12{,}2 - 0{,}44 \cdot 5 = 10$$

La media es 10 y la desviación típica es 5

MUESTRAS ALEATORIAS

PARA DEFINIR UNA MUESTRA ALEATORIA, SUPONGAMOS QUE x ES UNA VARIABLE ALEATORIA CON DISTRIBUCIÓN DE PROBABILIDADA f(x). EL CONJUNTO DE n OBSERVACIONES x_1, x_2, ..., x_n, TOMANDO COMO BASE EN LA VARIABLE ALEATORIA x Y CON RESULTADOS NUMÉRICOS x_1, x_2, ..., x_n SE LLAMA MUESTRA ALEATORIA SI LAS OBSERVACIONES SE OBTIENEN OBSERVANDO x DE MANERA INDEPENDIENTE BAJO CONDICIONES INVARIABLES n VECES. SE APRECIA QUE LAS OBSERVACIONES x_1, x_2, ... , x_n EN UNA MUESTRA ALEATORIA SON VARIABLES ALEATORIAS INDEPENDIENTES CON LA MISMA DISTRIBUCIÓN DE PROBABILIDADA f(x). ESTO ES, LAS DISTRIBUCIONES MARGINALES DE x_1, x_2, ... , x_n SON $f(x_1)$, $f(x_2)$, ... , $f(x_n)$, RESPECTIVAMENTE, Y POR INDEPENDENCIA, LA DISTRIBUCIÓN DE PROBABILIDADA CONJUNTA DE LA MUESTRA ALEATORIA ES:

$$g(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n)$$

DEFINICIÓN

x_1, x_2, ... , x_n ES UNA MUESTRA ALEATORIA DE TAMAÑO n SI:

a) **LAS x SON VARIABLES ALEATORIAS INDEPENDIENTES, Y**
b) **CADA OBSERVACIÓN x_1 TIENE LA MISMA DISTRIBUCIÓN DE PROBABILIDAD.**

PARA ILUSTRAR ESTA DEFINICIÓN, SUPONGA QUE ESTAMOS INVESTIGANDO LA RESISTENCIA AL ESTALLAMIENTO DE BOTELLAS DE VIDRIO CON CAPACIDADA PARA UN LITRO, Y QUE DICHA RESISTENCIA SE DISTRIBUYE DE MANERA NORMAL EN LA POBLACIÓN DE BOTELLAS. ESPERARÍAMOS ENTONCES QUE CADA UNA DE LAS OBSERVACIONES DE RESISTENCIA AL ESTALLAMIENTO x_1, x_2, ... , x_n EN UNA MUESTRA ALEATORIA DE n BOTELLAS FUERA UNA VARIABLE ALEATORIA INDEPENDIENTE CON EXACTAMENTE LA MISMA DISTRIBUCIÓN NORMAL.

NO SIEMPRE ES FÁCIL OBTENER UNA MUESTRA ALEATORIA. ALGUNAS VECES PODEMOS UTILIZAR TABLAS DE NÚMEROS ALEATORIOS UNIFORMES. EN OTRAS OCASIONES EL INGENIERO O EL CIENTÍFICO ES INCAPAZ DE USAR FÁCILMENTE PROCEDIMIENTOS FORMALES PARA AYUDAR A ASEGURARA LA ALEATORIEDAD, ASÍ QUE TIENE QUE CONFIAR EN OTROS MÉTODOS DE SELECCIÓN. UNA MUESTRA DE JUICIO ES AQUELLA QUE SE ELIGE A PARTIR DE LA POBLACIÓN MEDIANTE EL CRITERIO OBJETIVO DE UN INDIVIDUO. PUESTO QUE NI EL COMPORTAMIENTO ESTADÍSTICO DE LAS MUESTRAS DE JUICIO PUEDEN DESCRIBIRSE, DEBE EVITARSE ESTE MECANISMO DE SELECCIÓN.

EJEMPLO:

SUPONGA QUE, A PARTIR DE 25 LOTES DE CIERTA MATERIA PRIMA, DESEAMOS TOMAR UNA MUESTRA ALEATORIA DE 5 LOTES. PODEMOS NUMERAR LOS LOTES CON LOS ENTEROS 1 A 25. DESPUÉS DE ESTO SE ELIGE ARBITRARIAMENTE DE UNA TABLA DE <u>NÚMEROS ALEATORIOS</u> UNA FILA Y UNA COLUMNA COMO PUNTO DE PARTIDA. SE LEE HACIA ABAJO LA COLUMNA ELEGIDA, PARA OBTENER 2 DÍGITOS CADA VEZ HASTA ENCONTRAR 5 NÚMEROS ACEPTABLES (UN NÚMERO ACEPTABLE ES AQUEL ENTRE 1 Y 25). COMO EJEMPLO, CONSIDERE QUE EL PROCESO ANTERIOR BRINDA ESTA SECUENCIA DE NÚMEROS: 37, 48, 55, <u>2</u>, <u>17</u>, 61, 70, 43, <u>21</u>, 82, 73, <u>13</u>, 60, <u>25</u>. LOS NÚMEROS SUBRAYADOS ESPECIFICAN QUÉ LOTES DE MATERIA PRIMA SE VAN A ELEGIR COMO MUESTRA ALEATORIA.

<u>DISTRIBUCIÓN JI CUADRADA</u>

SEAN Z_1, Z_2, ..., Z_K VARIABLES ALEATORIAS DISTRIBUIDAS NORMAL E INDEPENDIENTEMENTE, CON MEDIA μ=0 Y

VARIANCIA σ^2 = 1. POR LO TANTO, LA VARIABLE ALEATORIA:

$$x^2 = z^2_1 + z^2_2 + ... + z^2_k$$

TIENE LA FUNCION DE DENSIDAD DE PROBABILIDAD

$$f(u) = \frac{1}{2^{k/2}\Gamma(k/2)} u^{(k/2)-1} e^{-u/2}, \qquad u > 0$$

$$= 0, \qquad \text{EN OTRO CASO}$$

Y SE DICE QUE SIGUE LA DISTRIBUCIÓN JI CUADRADA CON k GRADOS DE LIBERTAD, LO QUE ABREVIA COMO x^2_k.

LA MEDIA ES :

$$\mu = k$$

LA VARIANCIA ES :

$$\sigma^2 = 2k$$

EN LA SIGUIENTE FIGURA 1 SE MUESTRAN VARIAS DISTRIBUCIONES JI CUADRADA. OBSERVE QUE LA VARIABLE ALEATORIA JI CUADRADA ES NO NEGATIVA, Y QUE LA DISTRIBUCIÓN DE PROBABILIDADA ES SESGADA HACIA LA DERECHA; SIN EMBARGO, A MEDIDA QUE k AUMENTA, LA DISTRIBUCIÓN SE VUELVE MÁS SIMÉTRICA. CUANDO k $\to \infty$ LA FORMA LIMITE DE LA DISTRIBUCIÓN JI CUADRADA ES LA DISTRIBUCIÓN NORMAL.

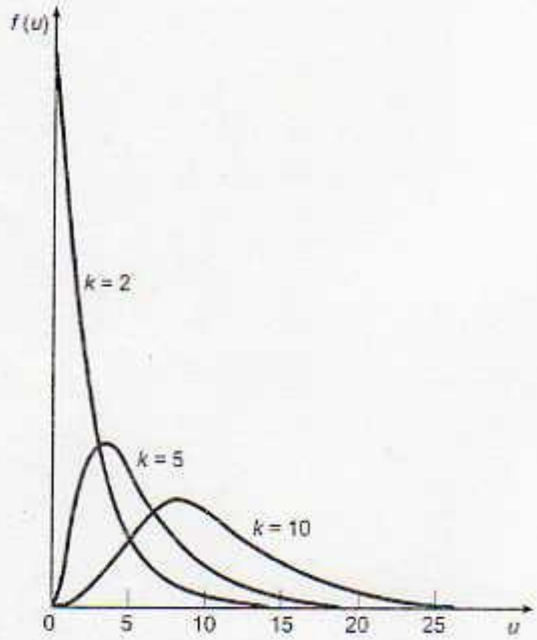


Figura 9-1 Varias distribuciones χ^2.

LOS PUNTOS PORCENTUALES DE LA DISTRIBUCIÓN x^2_k SE DAN EN LA TABLA. DEFINASE $x^2_{\alpha,k}$ COMO EL PUNTO PORCENTUAL O VALOR DE LA VARIABLE ALEATORIA JI CUADRAD CON k GRADOS DE LIBERTAD, TAL QUE LA PROBABILIDAD DE QUE x^2_k EXCEDA ESE VALOR ES α. ESTO ES :

$$P\{\, x^2_k \geq x^2_{\alpha,k} \,\} = \int_x^{\infty} f(u)du = \alpha$$

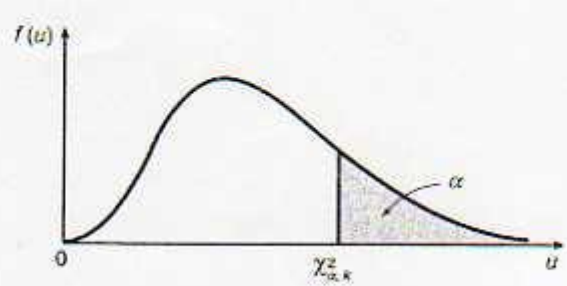


Figura 9-2 Punto porcentual $\chi^2_{\alpha,k}$ de la distribución ji cuadrada.

ESTA PROBABILIDADA SE MUESTRA COMO AREA SOMBREADA EN LA FIGURA 9-2.

PARA ILUSTRARA EL EMPLEO DEL EMPLEO DE LA TABLA, OBSERVE QUE:

$$P\left\{ x^2_{10} \geq x^2_{0.05,10} \right\} = P\left\{ x^2_{10} \geq 18.31 \right\} = 0.05$$

ESTO ES, EL PUNTO PORCENTUAL 5 DE LA DISTRIBUCION JI CUADRADA CON 10 GRADOS DE LIBERTAD ES $x^2_{0.05,10} = 18.31$

AL IGUAL QUE LA DISTRIBUCIÓN NORMAL, LA DISTRIBUCIÓN JI CUADRADA TIENE UNA PROPIEDAD REPRODUCTIVA.

<u>DISTRIBUCIÓN t DE STUDENT</u>

SI z ES UNA VARIABLE ALEATORIA CON DISTRIBUCIÓN NORMAL ESTANDAR Y v ES UNA VARIABLE ALEATORIA CON DISTRIBUCIÓN JI CUADRADA CON n GRADOS DE LIBERTAD, ENTONCES, SI z Y v SON INDEPENDIENTES :

$$t = \frac{z}{\sqrt{v/n}}$$

ES UNA VARIABLE ALEATORIA CON DISTRIBUCIÓN :

$$f(t) = \frac{\Gamma((n+1)/2)}{\Gamma(v/2)\sqrt{n\pi}} \left(1 + t^2/v\right)^{-((v+1)/2)}$$

CONOCIDA COMO DISTRIBUCIÓN t CON n GRADOS DE LIBERTAD.

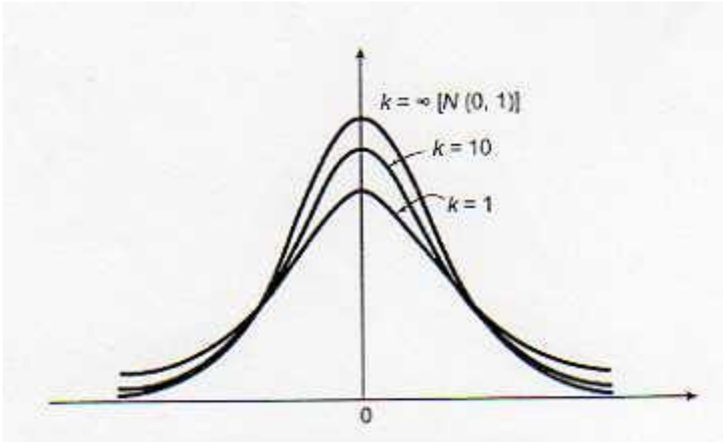


Figura 9-3 Varias distribuciones *t*.

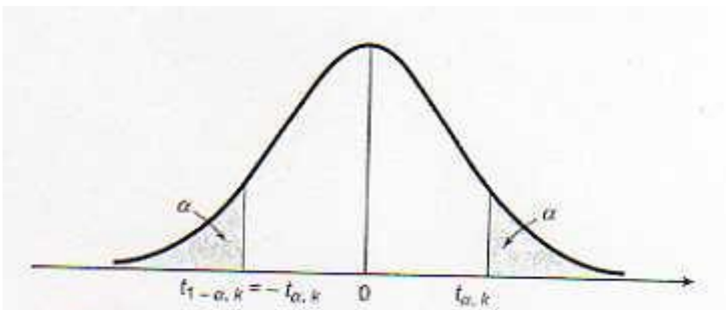


Figura 9-4 Puntos porcentuales de la distribución *t*.

PARA ILUSTRAR EL EMPLEO DE LA TABLA:

$$P\left\{ T \geq t_{0.05,10} \right\} = P\left\{ T \geq 1.812 \right\} = 0.05$$